

Opción A

Ejercicio 1

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x + e^{-x}$.

- [0'75 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f , así como los extremos relativos o locales de f
- [0'5 puntos] Determina los intervalos de concavidad y convexidad de f
- [0'75 puntos] Determina las asíntotas de la gráfica de f .
- [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f

Solución

a)

$$f'(x) = 1 - e^{-x} \Rightarrow \text{Crecimiento} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow 1 - e^{-x} > 0 \Rightarrow -e^{-x} > -1 \Rightarrow e^{-x} < 1 \Rightarrow \frac{1}{e^x} < 1 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow$$

$$e^x > e^0 \Rightarrow x > 0$$

Crecimiento $\forall x \in \mathbb{R}/x > 0$ (\forall significa "para todo")

Decrecimiento $\forall x \in \mathbb{R}/x < 0$

Mínimo relativo y absoluto en $x=0$ $\Rightarrow f(0) = 0 + e^0 = 1 \Rightarrow (0, 1)$ (de decrecimiento pasa a crecimiento)

b)

$f''(x) = e^{-x} \Rightarrow$ Como siempre $f''(x) > 0 \Rightarrow e^{-x} > 0$ al ser una exponencial, la función siempre es convexa (\cup) en todo \mathbb{R} .

c)

$$f(x) = x + e^{-x} = x + \frac{1}{e^{+x}}$$

Como esta función no se anula en el denominador, **no tiene asíntotas verticales**.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{e^{+x}} \right) = \infty + \frac{1}{\infty} = \infty + 0 = \infty$, $f(x)$ **no tiene asíntotas horizontales en $+\infty$**

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{e^{+x}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x + \frac{1}{e^{-x}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x + e^{+x} \right) = -\infty + \infty$, indeterminación

Como $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left((-x) \left(1 - \frac{e^{+x}}{-x} \right) \right) = -\infty (1 - \infty) = -\infty (-\infty) = +\infty$,

$** \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{+x}}{-x} \right) = \left[\frac{+\infty}{-\infty}, \text{aplicando L'Hôpital} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{+x}}{-1} \right) = -\infty$

$f(x)$ **no tiene asíntotas horizontales en $-\infty$**

La recta $y = mx + n$ es asíntota oblicua si $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$ y $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$

Como $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x \cdot e^{+x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{+\infty} \right) = (1 + 0) = 1$, y

$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{e^{+x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^{+x}} \right) = 0$

La recta $y = 1 \cdot x + 0 = x$ es asíntota oblicua en $+\infty$

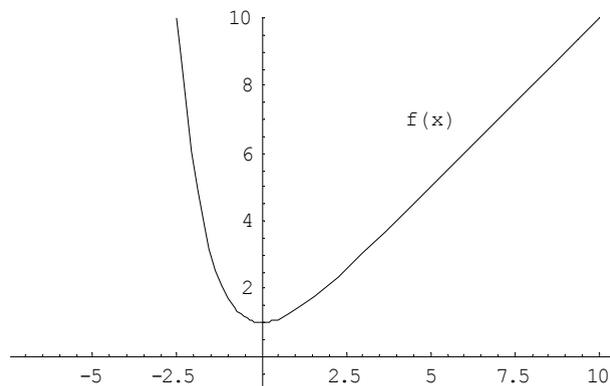
Como $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x \cdot e^{+x}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x \cdot e^{+x}) = (1 - \infty \cdot \infty) = -\infty$, y

$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{e^{+x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e^{-x}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{+x}) = \infty$

$f(x)$ **no tiene asíntotas oblicuas en $-\infty$**

d)

Un esbozo de la gráfica es



Ejercicio 2

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = x^2 + |x|$ y $g(x) = 2$

- a) [1 punto] Determina los puntos de corte de las gráficas de f y g . Esboza dichas gráficas.
 b) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas

Solución

a)

$$f(x) = x^2 + |x| = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9 \\ x^2 + x = 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9 \end{cases} \Rightarrow$$

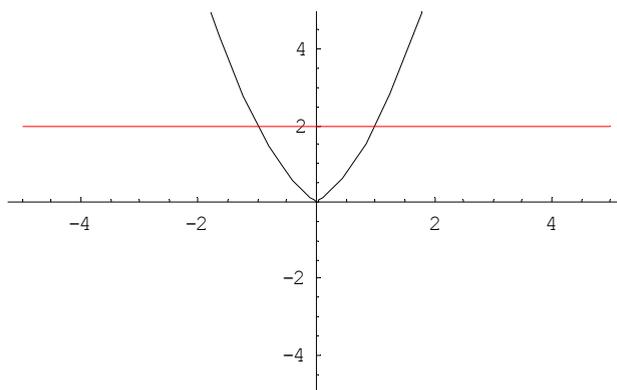
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } x < 0, x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1+3}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1+3}{2} = 2 > 0 \Rightarrow \text{No está en el intervalo estudiado} \\ x = \frac{1-3}{2} = -1 < 0 \Rightarrow f(-1) = (-1)^2 - (-1) = 2 \Rightarrow (-1, 2) \end{array} \right. \\ x = \frac{1-3}{2} = -1 < 0 \Rightarrow f(-1) = (-1)^2 - (-1) = 2 \Rightarrow (-1, 2) \end{array} \right. \\ \text{Si } x \geq 0, x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-1+3}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-1+3}{2} = 1 > 0 \Rightarrow f(1) = 1^2 + 1 = 2 \Rightarrow (1, 2) \\ x = \frac{-1-3}{2} = -2 < 0 \Rightarrow \text{No está en el intervalo estudiado} \end{array} \right. \\ x = \frac{-1-3}{2} = -2 < 0 \Rightarrow \text{No está en el intervalo estudiado} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ambas ramas son parábolas

Si $x < 0$, la abscisa del vértice es $f'(x) = 0$; $2x - 1 = 0$, de donde $x = 1/2$

Si $x \geq 0$, la abscisa del vértice es $f'(x) = 0$; $2x + 1 = 0$, de donde $x = -1/2$

Un esbozo de las gráficas es



b)

$$A = 2 \left[\int_0^1 2 \, dx - \int_0^1 (x^2 + x) \, dx \right] = 4 \cdot [x]_0^1 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^1 = 4 \cdot (1-0) - \frac{2}{3} \cdot (1^3 - 0^3) - (1^2 - 0^2)$$

$$A = 4 - \frac{2}{3} - 1 = \frac{7}{3} \text{ u}^2$$

Ejercicio 3

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = A - kI$, donde k es una constante e I la matriz identidad de orden 2

- a) [0'75 puntos] Determina los valores de k para los que B no tiene inversa
 b) [0'5 puntos] Calcula B^{-1} para $k = -1$
 c) [1'25 puntos] Determina la constantes α y β para las que se cumple $A^2 + \alpha A = \beta I$

Solución

a)

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-k & 1 \\ 2 & -1-k \end{pmatrix} \Rightarrow \exists B^{-1} (\exists \text{ significa " existe al menos" }) \Rightarrow |B| \neq 0 \Rightarrow$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -3-k & 1 \\ 2 & -1-k \end{vmatrix} = (-1) \cdot (3+k) \cdot (-1) \cdot (1+k) - 2 = (3+k) \cdot (1+k) - 2 = 3 + 3k + k + k^2 - 2 = k^2 + 4k + 1$$

$$\text{Si } |B|=0 \Rightarrow k^2 + 4k + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4 = 12 > 0 \Rightarrow k = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{-4 + 2\sqrt{3}}{2} = -2 + \sqrt{3} \\ k = \frac{-4 - 2\sqrt{3}}{2} = -2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}\} \Rightarrow |B| \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } B^{-1}$$

b)

$$|B| = (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 1 = 1 - 4 + 1 = -2 \neq 0 \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot (\text{adj } B^t) \Rightarrow B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{adj } B^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{(-2)} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{cases} A^2 + \alpha A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3\alpha & \alpha \\ 2\alpha & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11-3\alpha & -4+\alpha \\ -8+2\alpha & 3-\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \beta I = \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11-3\alpha = \beta \\ -4+\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 4 \\ -8+2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = 8 \Rightarrow \alpha = 4 \\ 3-\alpha = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11-3 \cdot 4 = \beta \Rightarrow \beta = -1 \\ 3-4 = \beta \Rightarrow \beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

Ejercicio 4

Sea la recta r definida por $\begin{cases} x-y=-2 \\ x-z=-3 \end{cases}$ y la recta s definida por $\begin{cases} x=1 \\ 2y-z=-2 \end{cases}$

a) [1 punto] Estudia la posición relativa de r y s

b) [1'5 puntos] Halla la ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a r

Solución

a) Se estudiará, primeramente, si son paralelas analizando si hay proporcionalidad entre sus vectores directores, de ser así veremos si tienen un punto común y si ello se cumple la recta será coincidente. En el caso de que no exista la proporcionalidad se estudiará si tienen un punto común y si no se cortan son rectas que se cruzan.

$$\begin{cases} \begin{cases} y=2+x \\ z=3+x \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases} \Rightarrow v_r = (1, 1, 1) \\ z=2+2y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=\mu \\ z=2+2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_s = (0, 1, 2) \\ S(1, 0, 2) \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{0} \neq \frac{1}{1} \Rightarrow \text{No son coincidentes ni paralelas} \Rightarrow$$

$$\text{Punto común} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ 2+\lambda = \mu \\ 3+\lambda = 2+2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2+1 = \mu \Rightarrow \mu = 3 \\ 3+1 = 2+2\mu \Rightarrow 2\mu = 2 \Rightarrow \mu = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{No se cortan}$$

Las rectas r y s se cruzan

b) Es un plano π generado por el vector director de s , por el de r y por un punto S de la recta s y el punto genérico G del plano

$$\begin{cases} v_r = (1, 1, 1) \\ v_s = (0, 1, 2) \\ SG = (x, y, z) - (1, 0, 2) = (x-1, y, z-2) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

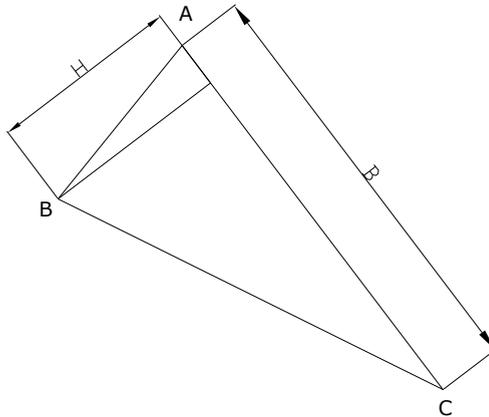
$$2 \cdot (x-1) + (z-2) - (x-1) - 2y = 0 \Rightarrow (x-1) - 2y + (z-2) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - 2y + z - 3 = 0$$

Opción B

Ejercicio 1

[2'5 puntos] De todos los triángulos cuya base y altura suman **20 cm.**, ¿qué base tiene el de área máxima?

Solución



$$\begin{cases} B+H=20 \Rightarrow H=20-B \\ A = \frac{1}{2} \cdot B \cdot H \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot B \cdot (20-B) = \frac{1}{2} \cdot (20B - B^2) \Rightarrow A' = \frac{dA}{dB} = \frac{1}{2} \cdot (20-2B) \Rightarrow$$

$$A'=0 \Rightarrow 20-2B=0 \Rightarrow 2B=20 \Rightarrow B=10 \Rightarrow A' = \frac{dA}{dB} = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1 < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \Rightarrow$$

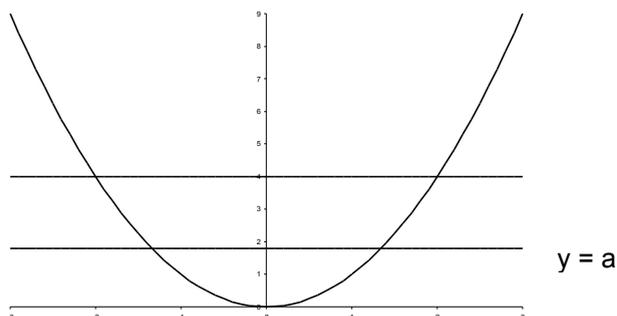
$$\begin{cases} B=10 \text{ cm.} \\ H=20-10=10 \text{ cm} \end{cases}$$

Ejercicio 2

[2'5 puntos] Calcula un número positivo a , menor que **4**, para que el recinto limitado por la parábola de ecuación $y = x^2$ y las dos rectas de ecuaciones $y = 4$ y $y = a$, tenga un área de $\frac{28}{3}$ unidades cuadradas.

Solución

$$\begin{cases} x^2=4 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases} \\ x^2=a \Rightarrow x=\pm\sqrt{a} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{a} \\ x=-\sqrt{a} \end{cases} \end{cases}$$



$$\frac{28}{3} = 2 \left[\int_0^2 4 \, dx - \int_0^{\sqrt{a}} a \, dx - \int_{\sqrt{a}}^2 x^2 \, dx \right] \Rightarrow \frac{14}{3} = 4 \int_0^2 dx - a \int_0^{\sqrt{a}} dx - \int_{\sqrt{a}}^2 x^2 \, dx \Rightarrow$$

$$\frac{14}{3} = 4x \Big|_0^2 - a \cdot x \Big|_0^{\sqrt{a}} - \frac{1}{3} [x^3]_{\sqrt{a}}^2 \Rightarrow \frac{14}{3} = 4 \cdot (2-0) - a \cdot (\sqrt{a}-0) - \frac{1}{3} [2^3 - (\sqrt{a})^3] \Rightarrow$$

$$\frac{14}{3} = 8 - a \cdot \sqrt{a} - \frac{8}{3} + \frac{a \cdot \sqrt{a}}{3} \Rightarrow \frac{14}{3} = \frac{24-8}{3} - \frac{2 \cdot a \cdot \sqrt{a}}{3} \Rightarrow \frac{14}{3} = \frac{16}{3} - \frac{2 \cdot a \cdot \sqrt{a}}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3} = -\frac{2 \cdot a \cdot \sqrt{a}}{3} \Rightarrow$$

$$a \cdot \sqrt{a} = 1 \Rightarrow (a \cdot \sqrt{a})^2 = 1^2 \Rightarrow a^2 \cdot a = 1 \Rightarrow a^3 = 1 \Rightarrow a = \sqrt[3]{1} = 1$$

Ejercicio 3

Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y=m+1 \\ x+my+z=1 \\ mx+y-z=m \end{cases}$$

a) [1'5 puntos] Determina los valores de m para los que el sistema es compatible

b) [1 punto] Resuelve el sistema en el caso $m = -1$

Solución

a)

Matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & -1 \end{pmatrix}$; matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & m+1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & -1 & m \end{pmatrix}$

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & -1 \end{vmatrix} = \{\text{Adjuntos } 1^{\text{a}} \text{ fila}\} = 1(-m-1) - 1(-1-m) = 0$, $\text{rango}(A) < 3$ sea cual sea m de \mathbb{R} .

En A utilizando las columnas 2 y 3 como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $\text{rango}(A) = 2$, sea cual sea "m" de \mathbb{R} .

En A^* , utilizando la columna 2, 3 (columnas con las que he formado el menor $\neq 0$ de la matriz A) y la de los términos independientes tenemos que $\begin{vmatrix} 1 & 0 & m+1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix}$ tiene que ser 0, para que $\text{rango}(A^*) = 2$ y el sistema sea

compatible.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & m+1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix} = \{\text{Adjuntos } 1^{\text{a}} \text{ fila}\} = 1(m+1) + (m+1)(-1-m) = -m^2 - m = 0$$

Resolviendo $-m^2 - m = 0$, obtenemos $m = -1$ y $m = 0$, por tanto el sistema es compatible si y solo si $m = 0$ y $m = -1$

b)

Lo resolvemos para $m = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow -2y+z=1 \Rightarrow z=1+2y \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow$$

$$x=-y \Rightarrow \text{Solución } (-\lambda, \lambda, 1+2\lambda)$$

Ejercicio 4

Sea el punto $P(2, 3, -1)$ y la recta r definida por $\begin{cases} x+y+2z=1 \\ x-2y-4z=1 \end{cases}$

a) [1'25 puntos] Halla la ecuación del plano que pasa por P y contiene r

b) [1'25 puntos] Halla el punto de r que está más cerca de P

Solución

a) Podremos hallar un haz de planos determinados por la recta r y calcularemos el que contenga a punto P que es el plano π pedido

$$\text{Haz de planos} \Rightarrow x+y+2z-1+\lambda(x-2y-4z-1)=0 \Rightarrow$$

$$2+3+2 \cdot (-1) - 1 + \lambda \cdot (2-2 \cdot 3-4 \cdot (-1) - 1) = 0 \Rightarrow 5-2-1+\lambda \cdot (2-6+4-1) = 0 \Rightarrow 2-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=2 \Rightarrow$$

$$x+y+2z-1+2 \cdot (x-2y-4z-1) = 0 \Rightarrow 3x-3y-6z-3=0 \Rightarrow \pi \equiv x-y-2z-1=0$$

b) Es el punto R de mínima distancia entre P y r , para ello por P hallaremos un plano perpendicular a r , que tendrá como vector director el de esta recta que es perpendicular al vector formado por P y el punto G que genera el plano y el producto escalar de estos dos es nulo. Hallaremos, después el punto de corte del plano y la recta

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ -x+2y+4z=-1 \end{cases} \Rightarrow 3y+6z=0 \Rightarrow y+2z=0 \Rightarrow y=-2z \Rightarrow x-2z+2z=1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow$$

$$r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (0, -2, 1) \Rightarrow \vec{v}_r \perp \overline{PG} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \overline{PG} = 0 \Rightarrow$$

$$\overline{PG} = (x, y, z) - (2, 3, -1) = (x-2, y-3, z+1)$$

$$(0, -2, 1) \cdot (x-2, y-3, z+1) = 0 \Rightarrow -2 \cdot (y-3) + z+1 = 0 \Rightarrow -2y+6+z+1=0 \Rightarrow \pi \equiv 2y-z-7=0$$

$$2 \cdot (-2\lambda) - \lambda - 7 = 0 \Rightarrow -4\lambda - \lambda - 7 = 0 \Rightarrow -5\lambda - 7 = 0 \Rightarrow -5\lambda = 7 \Rightarrow \lambda = -\frac{7}{5}$$

$$R \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \cdot \left(-\frac{7}{5}\right) = \frac{14}{5} \\ z = -\frac{7}{5} \end{cases} \Rightarrow R \left(1, \frac{14}{5}, -\frac{7}{5} \right)$$